centro panamericano de fiebre aftosa

SERIE DE MANUALES DIDACTICOS

ISSN 0101-5296

Nº 10

ELEMENTOS DE PROBABILIDADES

organización panamericana de la salud
oficina sanitaria panamericana, oficina regional
de la organización mundial de la salud

ORGANIZACION PANAMERICANA DE LA SALUD
Oficina Sanitaria Panamericana, Oficina Regional de la
ORGANIZACION MUNDIAL DE LA SALUD

CENTRO PANAMERICANO DE FIEBRE AFTOSA
CAIXA POSTAL 589 - ZC/00 - RIO DE JANEIRO, BRASIL

ELEMENTOS DE PROBABILIDADES

por

Vicente M. Astudillo

Melba Wanderley

1976

C O N T E N I D O

pág.

PROBABILIDADES 1

1. Conceptos básicos 1
2. Definición de probabilidad 4
3. Principios y procedimientos de contabilización (análisis combinatorio) 8
4. Propiedades fundamentales de las probabilidades 14
5. Adición de probabilidades 15
6. Multiplicación de probabilidades o probabilidad compuesta 18

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES 20

1. Distribución Binomial de Probabilidad 23
2. Distribución hipergeométrica de probabilidades 28
3. Distribución de Poisson de Probabilidades . . . 31
4. Distribución Normal 33

Propiedades de la curva Normal 38

Utilidad práctica de la distribución Normal . . 41

PROBABILIDADES

1. Conceptos básicos

Los problemas matemáticos que se han estudiado hasta aquí son de tipo determinista es decir del tipo siguiente :

a) El número 3 satisface la ecuación $5X + 2 = 17$

b) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$

c) Cualquier número mayor que 8 satisface

$2X - 3 > X + 5$

Sin embargo existen otros problemas en que la respuesta no es definida de esa manera. En los fenómenos (experimentos) aleatorios que ocurren en el mundo físico resultan observaciones distintas a partir de estos procesos que parecen ser idénticos.

En muchos fenómenos que ocurren, aun poniendo el mayor cuidado en eliminar la interferencia del hombre, tales como:

a) lanzamiento de una moneda

b) juego de dados

c) sorteo de una carta de baraja

d) sexo en el nacimiento de un niño

e) extracción de una bola de entre varias existentes en una urna

f) medición de la estatura de una persona

g) un nombre elegido en una lista telefónica

observamos que, aun repetidos varias veces bajo condiciones bien semejantes, presentan resultados completamente imprevisibles. Tanto es esto verdad que algunos de estos fenómenos son usados en los juegos de azar. (monedas, dados, cartas, loterías, etc.).

Llamaremos este tipo de fenómeno de fenómeno aleatorio y más frecuentemente experimento aleatorio.

Estos problemas también son susceptibles de ser tratados en forma lógica, de ahí que existe una rama en las Matemáticas que se ocupa de ellos. Es la teoría de probabilidades.

El conjunto de todos los resultados posibles de un fenómeno aleatorio se llama espacio muestral o conjunto universo del fenómeno y se representa por U.

EJEMPLOS:

i) Se lanza un dado y se lee el número de puntos marcados en el lado que quedó para encima:

$$U = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6\}$$

ii) Al nacer un niño se observa el sexo :

$$U = \{\text{hombre}, \ \text{mujer}\}$$

iii) Se lanzan dos monedas diferentes y se leen los resultados de los lados que quedaron para encima, indicando la figura por F y el sello por S :

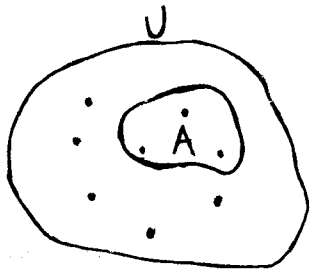
$$U = \{(F,F), (F,S), (S,F), (S,S)\}$$

Cualquier subconjunto del espacio muestral de U se llama <u>evento</u>. Cada punto del espacio muestral se llama <u>evento elemental</u>.

Considerando los ejemplos dados,

i) $A = \{2,4,6\}$ es el evento " El número de puntos obtenidos al lanzar un dado, es par ".

ii) $A = \{\text{sello}\}$ es el evento " Resultó sello en el lanzamiento de una moneda ".



Se debe considerar al conjunto vacío ($\emptyset$) como subconjunto de U, por lo tanto también es un evento:

$\emptyset$ = evento imposible.

A la vez el espacio muestral completo también es un evento :

U = evento cierto

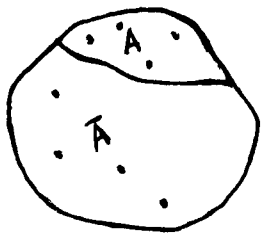
Por ejemplo :

Al lanzar un dado " obtener un número de puntos mayor que 6" es un evento imposible y " obtener un número de puntos menor o igual a 6" es un evento cierto.

Se llama complementario del evento A al evento $\bar{A}$ tal que :

$$\bar{A} = U - A$$ esto es,

$\bar{A}$ es el subconjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.



2. Definición de probabilidad

Consideremos una vez más el experimento aleatorio, lanzamiento de una moneda y lectura del lado que quedó para encima. Si repitiésemos n veces el experimento y obtuviésemos a veces el resultado " figura ", diremos que la frecuencia absoluta del evento " figura " es a y la frecuencia relativa :

$$f_1 = \frac{a_1}{n} .$$

Otra persona repite de nuevo el experimento de lançar una moneda y lectura del lado en que cae para encima. El número de veces es m . La cantidad de veces que cae el evento " figura " la llamamos frecuencia absoluta a y la frecuencia relativa del evento " figura " es :

$$f_2 = \frac{a_2}{m}$$

Una serie de estas repeticiones produce una serie de frecuencias relativas f_1 , f_2 , f_3 ,... Estas frecuencias relativas no difieren mucho de un conjunto de repeticiones a otro, sino que parecen agruparse alrededor de un número fijo y desconocido P_r. Repitiéndose la experiencia un número muy grande de veces, la ocurrencia del evento " figura " tiende a estabilizarse alrededor de la mitad de N, esto es :

$$\text{si } n \longrightarrow \infty \text{, entonces } f_2 = a_i/n \longrightarrow 1/2.$$

Esto significa que en el lanzamiento de una moneda perfecta (homogénea, simétrica, etc.) un número grande de veces, la " probabilidad " de obtener " figura " es 1/2 ó 50%.

Haciendo pie en estas experiencias se ha establecido que existe un número constante P_r a cuyo alrededor se agrupan las frecuencias relativas experimentales del evento " figura ". El número P_r se llama probabilidad del evento estudiado. En aquellos casos en que es posible definir en forma exhaustiva el espacio muestral se torna factible la definición de la probabilidad "a priori" de un evento.

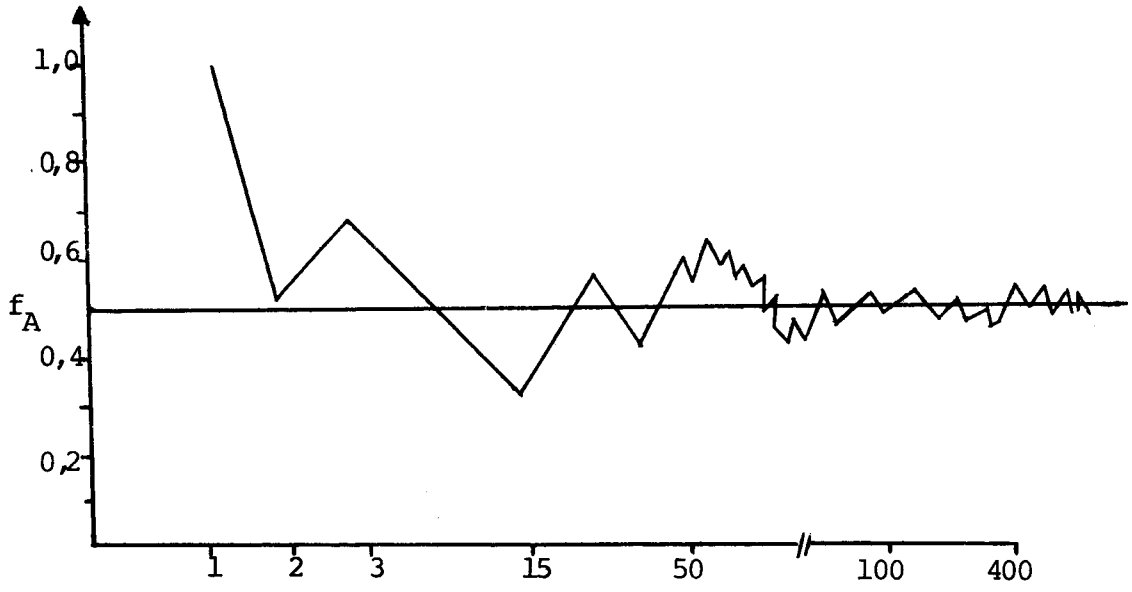
La frecuencia relativa es una medida observacional de la probabilidad de un evento y por tanto corresponde a una probabilidad " a posteriori " de un evento. Una propriedad importante de las frecuencias relativas acerca ésta al concepto de probabilidad, tal propriedad es la regularidad o estabilidad estadística de las frecuencias relativas. Cuando se tiene un gran número de repeticiones de un fenómeno aleatorio, la frecuencia relativa de un evento A (f_A) tiende a estabilizarse alrededor de un valor numérico definido Pr(A).

Por ejemplo al hacer un primer lanzamiento de una moneda la probabilidad " a posteriori " del evento cara (A) " es 1 ó 0, ya que si el resultado es cara, entonces $f_A = 1$, si el resultado es figura, entonces $f_A = 0$.

Al repetirse el experimento un número pequeño de veces (3,5,8 etc.) se produce una fuerte fluctuación en el valor de f_A, disminuyendo a medida que el número de lanzamientos sea cada vez mayor.

Al reducirse el margen de variación, como consecuencia del gran número de lanzamientos, la frecuencia relativa f_A del evento " ocurrencia de cara " oscilará levemente alrededor del valor 0,5.

Frecuencia relativa. Evento : ocurrencia de cara (A)



Lanzamientos de una moneda

El gráfico muestra lo que ocurre al aumentar en forma considerable el número de lanzamientos (n) : existe una tendencia de f_A a ubicarse en la proximidad de la constante 0,5.

Si en un fenómeno o experimento aleatorio, el número de elementos del espacio muestral U es n y el de elementos del evento A es a, la probabilidad del evento favorable es el número P_r (A) tal que,

$$P_r(A) = \frac{a}{n}$$

Debe tenerse en cuenta que esta definición sólo vale si todos los elementos de U tienen la misma probabilidad, esto es, si el espacio muestral es equiprobabilístico.

Siendo así, a es el número de casos favorables a A y n el número de casos posibles cuando se realiza el experimento.

Ejemplos :

i) Cuál es la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número de puntos menor o igual a 4 ?

$$U = \left\{1,2,3,4,5,6\right\} \quad y \quad A = \left\{1,2,3,4\right\}$$

$$P_r(A) = a/n = 4/6 = 2/3$$

ii) Cuál es la probabilidad de lanzar una moneda y obtener sello ?

$$U = \left\{ \text{figura, sello} \right\} \quad y \quad A = \left\{ \text{sello} \right\}$$

$$P_r(A) = a/n = 1/2$$

3. <u>Principios y procedimientos de contabilización (análisis combinatorio)</u>

Cuando se estudia un " fenómeno "que se manifiesta a través de diferentes modalidades (eventos), uno de los problemas fundamentales es el de la determinación del " factor casualidad " asociado a la ocurrencia de ciertos eventos. Este problema es propio del cálculo de las probabilidades que será tratado más adelante. En algunos casos, la cuenta de "elementos" que corresponden a todos los eventos posibles, posibilita la solución de los problemas de probabilidad. Cuando se hacen aplicaciones del cálculo de probabilidades a la realidad puede ocurrir que el número de " elementos " sean muchos y se convierta en problema el recuento de ellos. De ahí que sea necesario el conocimiento de algunos procedimientos que facilitan el recuento.

Si un acontecimiento puede ocurrir de n maneras diferentes, y otro acontecimiento puede ocurrir de m maneras diferentes, entonces los dos acontecimientos pueden ocurrir <u>simultáneamente</u> de $n.m$ maneras.

Veamos cuantos " elementos " son posibles al lanzar un par de dados una vez.

Al lanzar el primer dado puede "ocurrir"

una de las 6 caras. Para cada uno de estos resultados, el segundo dado puede " dar " 6 resultados a su vez. Por lo tanto, el lanzamiento del par de dados puede dar 6.6=36 resultados . Esto significa, que el par de dados puede caer de 36 maneras diferentes.

Obviamente, este principio puede ser extendido para cualquier número de eventos. Por lo tanto, en el caso de k "operaciones" que pueden dar resultados de n_1, n_2, n_3, ..., n_k maneras respectivamente, si todas fueran realizadas simultáneamente, y en condiciones idénticas pueden ocurrir $n_1 . n_2 . n_3 . \ldots, n_k$ resultados diferentes.

Veamos ahora otro ejemplo. Los tipos distintos de rebaños de bovinos que se pueden formar con ganado de raza Hereford, Normando, Cebú y Holstein, si se dispone de 4 bovinos Hereford, 3 bovinos Normando, 5 bovinos Cebú y 4 bovinos Holstein.

El número total de rebaños distintos es : 4. 3. 5. 4 = 240.

Como se observa este principio da una base para la cuenta de los eventos posibles (espacio muestral). Los conceptos del análisis combinatorio que se entregan permiten, en algunos casos, una racionalización aún mayor de esa cuenta.

Ahora es conveniente considerar algunos tipos de agrupamientos característicos :

a) Permutaciones

Las permutaciones (P) son agrupamientos formados con un número distinto de objetos o elementos . Los agrupamientos sólo difieren por el orden de los elementos que los forman. Se llama permutación de n elementos a toda agrupación de los elementos en un orden determinado.

El símbolo " Pn,n " se utiliza para designar el número de permutaciones de n elementos distintos considerando todos cada vez.

$$Pn,n = n(n-1)\ (n-2)\ .....3.2.1 = n!$$

El símbolo n! se lee " factorial de n" , en este caso n debe ser entero y mayor que uno.

El factorial de cero y uno es la unidad

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

No hay factoriales definidos para los números negativos y otros números reales.

Ejemplo :

Sean tres letras a, b, c.

Todas las permutaciones posibles con las tres letras a, b, c son :

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Para determinar el número de permutaciones podríamos haber aplicado el principio expuesto al comenzar esta materia.

Se puede tomar una de las tres letras para la primera posición. Una vez escogida ella, restan dos letras para la segunda posición. Para la tercera posición resta sólo una letra, puesto que dos de ellas ya han ocupado las dos primeras posiciones. Por lo tanto, el número de permutaciones es:

$$P_{3,3} = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$$

El número de permutaciones de las cuatro letras a, b, c, d, tomando las cuatro cada vez, sería :

$$P_{4,4} = 4\,! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24.$$

En ciertos casos puede que el interés radique en disponer de sólo $r < n$ de los n elementos y dejar la otra parte de ellos abandonada. Por ejemplo : Consideremos los agrupamientos posibles cuando cada vez se toman dos de cuatro letras. Se habla entonces de permutaciones de n(4) elementos tomando r(2) cada vez. Se pueden obtener los siguientes agrupamientos :

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da , db, dc. Para la primera posición se pueden escoger 4 letras, en cambio para la segunda restan 3 letras. Por tanto, el número de agrupamientos es 4 . 3 = 12.

Se utiliza el símbolo " Pn, r " para designar el número de permutaciones de n elementos distintos tomando r cada vez.

$$P_{n,r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!} \quad (r \leq n)$$

Este tipo de permutación es un agrupamiento de r elementos, posible de formar con un número distinto n de elementos, siendo $r \leq n$ tal que, dos agrupamientos con los mismos elementos, tomados en orden diferente, son diferentes.

El ejemplo de las cuatro letras, se trata precisamente, de un problema de " arreglo " de grupos de dos elementos. De ahí que en algunos textos este tipo de permutación se llama arreglo. Siguiendo el principio de la mul

tiplicación, generalizando, se tiene que para la primera posición se pueden tomar n elementos. Para la segunda posición restan n-1 ; para la tercera n-2 y sucesivamente para la r-ésima restarán n - r + 1. Por lo tanto tenemos :

El número de permutaciones posibles de n elementos distintos, tomados r a r, se pueden escribir también :

$$P_{n,r} = n(n-1) \ldots\ldots (n-r+1).$$

En todo lo dicho se ha supuesto que los n elementos son distintos . Si son iguales estos razonamientos no son válidos.

Consideremos ahora el caso de permutaciones con elementos no totalmente distintos. Dadas las letras a, b, c, supongamos que b y c son iguales a x. Las 6 permutaciones serían:axx,axx, xax,xax, xxa,xxa. De ellas sólo tres son distintas. Esto sucede porque para cada grupo la permutación de los elementos iguales resulta en el mismo grupo. Como el número de permutaciones de 2 elementos iguales es 2 !, resulta que el número total de permutaciones es 3!/2! = 3. De un modo general, el número de permutaciones con n objetos,siendo n_1 de un tipo, n_2 de un segundo tipo y sucesivamente hasta n_k objetos de un k-ésimo tipo, está dado por :

$$P_{n;\, n_1,\, n_2,\, \ldots\, n_k} = \frac{n\,!}{n_1!\;\; n_2!\;\; \ldots\; n_k!}$$

Estas son las llamadas <u>permutaciones simples con elementos repetidos</u>.

Ejemplo : De cuántas formas diferentes

podemos disponer 9 bovinos en una " manga ", si cuatro son Hereford, tres son Holstein y dos son Cebú, suponiendo iguales los de una misma raza ?

Solución :

$$P_{9\,;\,4,3,2} = \frac{9\,!}{4\,!\;3\,!\;2\,!} = 1.260$$

b) Combinaciones

En las permutaciones importaba el orden de los elementos. Si se desatiende el orden de los elementos en su agrupamiento, estos se llaman combinaciones. Una combinación de un conjunto de elementos es un subconjunto de la totalidad o de una parte de los elementos, agrupados sin tener en cuenta el orden en que están. Veamos el número de subconjuntos de r elementos cada uno, que se puedan formar a partir de los n elementos de un conjunto. Esto se conoce como el número de combinaciones de n elementos tomando r cada vez.

Ejemplo : Cuántos subconjuntos de 4 letras se pueden formar a partir del conjunto de las 5 vocales ?

En este ejemplo no importa el orden, por lo que se tienen :

(a,e,i,o), (a,e,i,u), (a,e,o,u), (a,i,o,u), (e,i,o,u)

Existen 5 subconjuntos de cuatro vocales.

El número de combinaciones de n elementos distintos tomando r cada vez, se designa por el símbolo "$C_{n,r}$"

donde ($0 \leq r \leq n$). También se suele emplear el símbolo $\binom{n}{r}$.

$$C_{nr} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Aplicando esta fórmula al ejemplo :

$$C_{5,4} = \frac{5!}{4!\;1!} = 5$$

Se conviene que $C_{n,0} = 1$.

4. Propriedades fundamentales de las probabilidades

La probabilidad de un evento tiene una serie de propriedades matemáticas. Se llama distribución de probabilidad a la asignación de un número real a cada evento del espacio muestral **U**, tal que satisfaga las siguientes propriedades :

a) $P_r(\emptyset) = 0$ La probabilidad de un evento imposible es cero.

b) $P_r(U) = 1$ La probabilidad de un evento cierto es la unidad.

c) $0 \leq P_r(A) \leq 1$. La probabilidad es un número real que varía entre 0 y 1.

d) $P_r(A) + P_r(\bar{A}) = 1$. La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es igual a uno.

e) $\sum_{i=1}^{U} P(A) = 1$ La suma de las probabilidades de todos los eventos que componen el espacio muestral **U** , es igual a uno.

5. Adición de probabilidades

Antes que nada es necesario determinar si los eventos son excluyentes o no.

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si, y solamente si, $A \cap B = \emptyset$. De lo que se desprende que $P_r(A \cap B) = 0$, esto es la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos mutuamente excluyentes es nula.

Ejemplos :

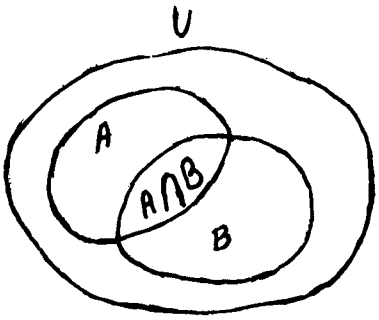
i) Una urna contiene 5 bolas rojas y 1 bola blanca.

Sean : A el evento " extraer una bola roja de la urna " y B el evento " extraer una bola blanca de la urna ". Si el experimento es sacar una bola de la urna cada vez, A y B son mutuamente excluyentes.

ii) Al lanzar un dado, sea A el evento " obtener una cara que sea múltiplo de 2 " y el evento B sea " obtener una cara que sea múltiplo de 3 ". Los eventos A y B no son mutuamente excluyentes pues $A \cap B = \{6\}$.

Si A y B son dos eventos del espacio muestral U, entonces :

$$P_r(A \cup B) = P_r(A)+P_r(B)-P_r(A \cap B).$$



El número de elementos del conjunto $A \cup B$ es igual a la suma de los números de elementos de A y de B, menos el número de elementos de $A \cap B$ (que fueron contados dos veces) entonces :

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \quad \text{o sea}$$

$$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B) - P_r(A \cap B).$$

Ejemplo :

Cuál es la probabilidad de lanzar un dado y obtener un múltiplo de 2 ó de 3.

Sean $A = \{2,4,6\}$ el evento de "obtener un múltiplo de 2" y

$B = \{3,6\}$ el evento de "obtener un múltiplo de 3".

Sabemos que el espacio muestral es :

$U = \{1,2,3,4,5,6\}$

Por tanto :

$$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B) - P_r(A \cap B) =$$

$$1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$$

Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B)$$

Esta propriedad es una consecuencia del teorema anterior, bastando notar que ahora $P_r(A \cap B) = 0$.

Ejemplo :

Un rebaño de 100 bovinos está formado por 52 Hereford, 27 Angus, 10 Shorthorn y los demás Cebú. Escogido al azar un bovino del rebaño, cual es la probabilidad de que él sea Hereford o Angus?

Sean los eventos :

A = escoger un bovino Hereford

B = escoger un bovino Angus

$A \cap B$ = escoger un bovino Hereford y Angus. Entonces

$n(A) = 52 \quad n(B) = 27 \quad y \quad n(A \cap B) = 0$

por tanto :

$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B) = 52/100 + 27/100 =$

$79/100$.

Esta propriedad puede ser generalizada.

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son eventos dos a dos mutuamente excluyentes, entonces :

$$P_r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$P_r(A_1) + P_r(A_2) + P_r(A_3) + \ldots + P_r(A_n).$$

6. Multiplicación de probabilidades o probabilidad compuesta

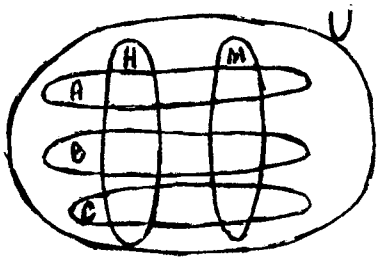
Consideremos el siguiente problema:

Un rebaño de cerdos presenta la siguiente composición :

		hembras (H)	machos (M)
Landrace	A	5	15
Duroc Jersey	B	10	10
Large White	C	35	25
Total		50	50

La interrogante es : escogida una hembra del rebaño, cuál es la probabilidad que sea Landrace ?

$$P_r(A/H) = \frac{n(A/H)}{n(H)} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$



Esto es, la hembra Landrace debe ser escogida del conjunto de hembras, por lo tanto el cerdo procurado pertenece al conjunto $A \cap H$ y el conjunto universo en esta operación es H. Estamos estudiando una distribución conjunta considerando raza y sexo.

Ahora es más fácil comprender la siguiente definición

Se llama probabilidad condicional de A, relativa a B, a la probabilidad del evento A cuando ya se verificó el evento B. Se indica por $P_r(A/B)$.

Es evidente que :

$$P_r(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

ó

$$P_r(A|B) = \frac{n(A \cap B)/n(U)}{n(B)/n(U)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Con lo cual :

$$P_r(A \cap B) = P_r(B) \ . \ P(A|B) = P(A).P(B|A)$$

Esto es, la probabilidad de intersección de dos eventos A y B es igual al producto de la probabilidad de uno por la probabilidad condicional del otro en relación al primero.

Ejemplo :

En el caso del ejemplo dado de los cerdos, cuál es la probabilidad de seleccionar una hembra y siendo hembra que sea de raza Landrace?

$$P_r(H \cap A) = P_r(H) \ . \ P_r(A|H) = \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{50} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Dos eventos son <u>independientes</u> cuando la probabilidad de que uno de ellos ocurra es independiente del hecho de haber o no ocurrido el otro. En este caso tenemos :

$$P_r(A|B) = P_r(A) \quad y \quad P_r(B|A) = P_r(B)$$

Ejemplo :

Se lanza al aire una moneda dos veces y se obtienen los eventos " figura "y "cara" respectivamente. Estos dos eventos son independientes.

Si A y B son eventos independientes , entonces,

$$P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$$

Ejemplo :

Se lanzan un dado y una moneda. Cuál es la probabilidad de obtener los eventos " 6 puntos " con el dado y " figura " con la moneda ?

Llamando los eventos A y B respectivamente, es evidente que A y B son independientes, entonces :

$$P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B) = 1/6 \cdot 1/2 = 1/12$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

Sabemos que al coleccionar un cierto número de datos estadísticos se puede construir una distribución de frecuencias, sean las frecuencias absolutas como las frecuencias relativas. También sabemos de la correspondencia existente entre frecuencia relativa y probabilidad ,

situación que vale la pena tener en cuenta en el desarrollo de este capítulo.

El trabajar con distribuciones de frecuencias significa manejar distribuciones estadísticas, ya que ellas se construyen con datos recogidos de la naturaleza, lo que implica que necesariamente se trata de un número finito de casos. Sin embargo, los matemáticos han estimado ventajoso considerar distribuciones de un número infinito de casos, provenientes de poblaciones hipotéticas. Se toman como punto de partida algunas hipótesis de carácter general, y se deducen matemáticamente las propriedades de tales distribuciones de frecuencias. Es común llamar a este tipo de distribución, distribución de probabilidades o distribución teórica.

Una distribución teórica corresponde a un fenómeno " ideal ", que se produce un número ilimitado de veces en condiciones " idénticas ". En cambio, en la realidad esto no ocurre por razones que se han considerado, con cierta extensión, en los capítulos primeros de este curso.

En términos de probabilidades, en el caso de fenómenos teóricos, se habla de probabilidades " a priori ", en contraposición con las probabilidades "a posteriori" o frecuencias relativas, que caracterizan a los fenómenos naturales, observacionales.

A esta altura es importante destacar la existencia de ciertos nexos entre los esquemas teóricos y lo que ocurre en la práctica. Precisamente, existe un postulado estadístico que permite establecer esta condición. Es la llamada ley estadística del caso, o ley del azar, que se puede definir de la siguiente manera : al repetirse un fenómeno natural, un número grande de veces, en las mismas condiciones, la frecuencia relativa de cada suceso difiere poco de la probabi-

lidad calculada " a priori ", siendo esa diferencia cada vez menor a medida que aumenta el número de repeticiones, es decir, a medida que aumenta n.

Para conocer una variable aleatoria se deben considerar dos aspectos :

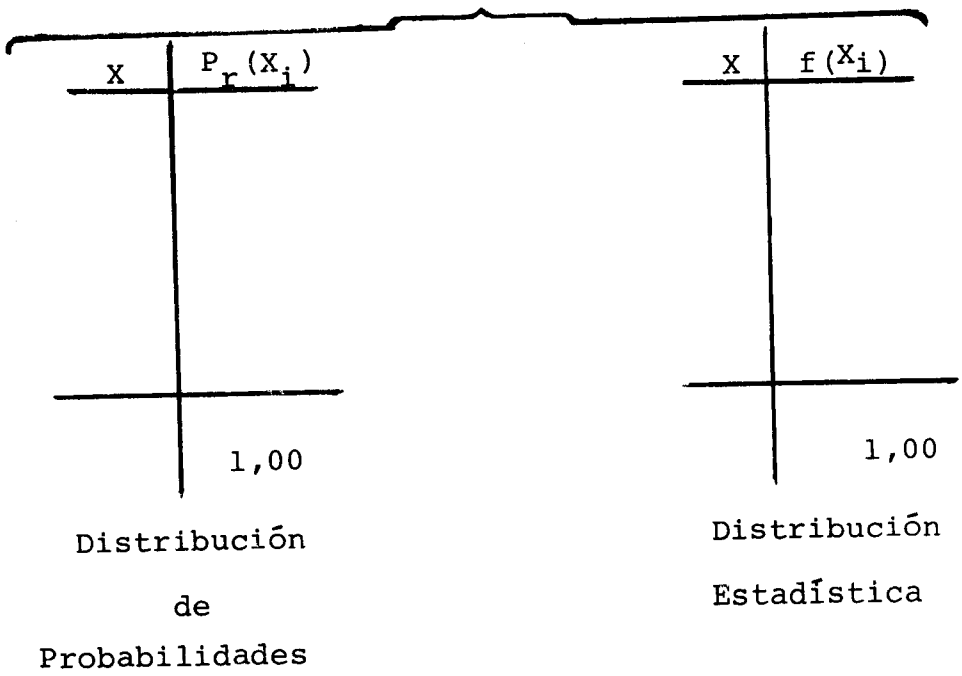
a) el espacio muestral o la lista de todos los valores o eventos posibles que puede tomar la variable aleatoria (X).

b) el peso relativo o probabilidad de cada uno de esos eventos o valores de la lista :

$Pr\ (X_i)$ probabilidad " a priori " o probabilidad matemática.

$f\ (X_i)$ frecuencia relativa, probabilidad " a posteriori " o probabilidad estadística.

LEY DE DISTRIBUCION



Existen dos grupos de distribuciones de probabilidades según el tipo de variable aleatoria sea discreta o continua. En los primeros la variable X asume sólo valores enteros, en la segunda la variable X puede presentar un valor fraccionario.

1. Distribución Binomial de Probabilidad

Consideremos el problema : Un rebaño de ovejas tiene 5 de raza Merino, 6 Corriedale y 2 Caracul. Seleccionando al azar 4 ovejas sucesivamente y volviéndolas al rebaño cada vez, cuál es la probabilidad de obtener 3 ovejas Merino ?

Sean los eventos, A : seleccionar una oveja Merino

B : seleccionar una oveja no Merino

En cualquiera de las 4 selecciones, teniendo en cuenta que la oveja es repuesta tenemos que :

$$P_r(A) = 5/15 = 1/3 \qquad P_r(B) = 10/15 = 2/3$$

En las 4 selecciones, debemos obtener 3 veces oveja Merino y 1 vez oveja no Merino, o sea, nos satisfacen los conjuntos (ordenados de acuerdo con el orden de selección) :

(A,A,A,B), (A,A,B,A), (A,B,A,A) y (B,A,A,A)

en número de $C_{4,3} = \binom{4}{3}$

Como la probabilidad de A (o de B), en cualquiera de las selecciones, es independiente de la verifi -

cación de A (o de B) en las selecciones anteriores pues sus probabilidades son constantes, se sigue que en cualquier ordenación, la probabilidad de que ocurran 3 Merinos y una no Merino es igual al producto de las probabilidades, esto es :

$$(1/3)^3 \quad . \quad (2/3)^1$$

luego la probabilidad pedida es :

$$\binom{4}{3} \; . \; (1/3)^3 \; . \; (2/3)^1 =$$

$$4 \; . \; 1/27 \; . \; 2/3 \qquad = \; 8/81 = 0{,}099$$

Consideremos ahora una experiencia que se repite $\underline{n}$ veces y que en cualquiera de ellas tengamos

$$P_r(A) = p \qquad y \qquad P_r(B) = 1 - p = q$$

Cuál es la probabilidad del evento A ocurrir en $\underline{X}$ de las $\underline{n}$ experiencias ?

Notemos que en las $\underline{n}$ experiencias $P_r(A)$ y $P_r(B)$ son constantes y el resultado de cada experiencia es independiente de los resultados de las anteriores ; siendo así, la probabilidad de obtener $\underline{X}$ veces el evento A y $\underline{n - X}$ el evento B, en cualquier orden, es el producto de las probabilidades, esto es :

$$p^X \; . \; (1-p)^{n-X} = p^X q^{n-X}$$

Como al problema le satisface cualquier conjunto ordenado de $\underline{n}$ elementos, siendo $\underline{X}$ iguales a A y $\underline{n - X}$ iguales a B, no importando el orden de los elementos, dentro de cada uno de estos dos subconjuntos ; el cálculo del número

de conjuntos ordenados que satisfacen el problema (permutaciones de n elementos con X de tipo A y n - X de tipo B)es el de las llamadas permutaciones simples con elementos repetidos, en este caso dentro de dos categorías, o sea :

$$Pn;\ X,\ (n - X) = \frac{n!}{X!\ (n - X)!}$$

que equivale a $\binom{n}{X}$ y multiplicar este número por el producto de las probabilidades obteniendo :

$$P_r(X) = \binom{n}{X} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

denominada " Ley Binomial de Probabilidad " porque expresa el desarrollo de

$$\left[p + (1 - p)\right]^n = (p + q)^n$$

Debemos considerar que la ley binomial es sólo aplicable a una experiencia aleatoria que obedezca a las características siguientes :

a) La experiencia debe ser repetida, en las mismas condiciones, un número n prefijado de veces.

b) Cada vez que la experiencia es hecha o curre el evento A o el evento B.

c) $P_r(A)$ es constante en todas las n veces

d) Cada experiencia es independiente de las demás.

Ejemplo : En una lechería hay 5 vacas por

parir. Cuál es la probabilidad de obtener 3 machos y 2 hembras ?

Sea A el evento de " obtener macho " en una parición :

$P_r(A) = p = 1/2 \quad n = 5 \quad y\ X = 3$ entonces

$P_r(A) = \binom{5}{3} . (1/2)^3 . (1-1/2)^{5-3} = 10 . (1/2)^5 =$

$10/32 = 5/16.$

Para el ejemplo dado, se pueden determinar , aplicando la ley binomial de probabilidades, las probabilidades correspondientes a cada evento del espacio muestral de un experimento aleatorio.

La expansión de $(p + q)^n$ nos da la distribución bimonial de probabilidades, dado que $(p + q)^n = 1$, para $n \geqslant 1$

$$(p+q)^n = (q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3 + \ldots + p^n) = 1$$

es decir :

$$(p + q)^n = \sum_{X=0}^{n} P_r(X) = 1$$

Cada término de la expansión del binomio $(p+q)^n$ se puede calcular separadamente a través de la ley binomial de probabilidades.

$$P_r(X) = \frac{n!}{X!\ (n-X)!} p^X q^{n-X} \qquad (0 \leq X \leq n)$$

En ese caso a cada término le corresponde un distinto valor de X entre 0 y n. La media aritmética es $\mu = np$ y la varianza es $\alpha^2 = npq$.

En el ejemplo de las 5 vacas por parir, la distribución de probabilidades puede ser determinada de la siguiente manera :

Sea A el evento " obtener macho " en una parición :

$P_r(A) = 1/2$

$n = 5$

$X = \{0,1,2,3,4,5\}$ machos

$(p+q)^n = (1/2 + 1/2)^5 = 1$

Número de Machos	Ley binomial	Término Expansión Binomio	Valor de la Probabilidad
0	$\frac{5!}{0!.(5-0)!} p^0 q^{5-0}$	q^5	1/32
1	$\frac{5!}{1!(5-1)!} p^1 q^{5-1}$	$5pq^4$	5/32
2	$\frac{5!}{2!(5-2)!} p^2 q^{5-2}$	$10p^2q^3$	10/32
3	$\frac{5!}{3!(5-3)!} p^3 q^{5-3}$	$10p^3q^2$	10/32
4	$\frac{5!}{4!(5-4)!} p^4 q^{5-4}$	$5p^4q$	5/32
5	$\frac{5!}{5!(5-5)!} p^5 q^{5-5}$	p^5	1/32
	$\sum_{x=0}^{5} P_r(X)$	$(p+q)^5$	32/32=1

La distribución binomial de probabilidades $(p+q)^n$ es claramente discontinua para pequeños valores de n. Sin embargo, cuando n es grande se aproxima a una forma continua del tipo de la curva Normal.

2. Distribución hipergeométrica de probabilidades

No se puede usar la distribución binomial para encontrar la probabilidad de obtener 3 cartas rojas en 5 selecciones a partir de una baraja corriente de 52 cartas, a menos que cada carta extraída sea devuelta a la baraja antes de la siguiente selección.

El problema presente es el de selección (muestreo) sin reemplazamiento.

Expliquemos este problema con un ejemplo más próximo a nuestra actividad. Supongamos que tenemos un UNIVERSO : N = 8 cerdos. Por información previa (supuesto) :

N = 8 → 3 cerdos raza Duroc Jersey
N = 8 → 5 (8-3) cerdos raza Landrace

Si elegimos al azar un cerdo:	P_r en la la. selección
Duroc Jersey	3/8
Landrace	5/8

Si en realidad resulta ELEGIDO		P_r en la 2a.selección
	un cerdo Duroc Jersey	Duroc Jersey — 2/7
		Landrace — 5/7
	un cerdo Landrace	Duroc Jersey — 3/7
		Landrace — 4/7

En cualquier caso tenemos que las probabilidades de selección CAMBIAN. La razón de este hecho radica en que estamos trabajando con una elección SIN REEMPLAZO.

La ocurrencia de UN tipo de suceso (éxito B) MODIFICA la ocurrencia del otro (fracaso, $\bar{B}$).

Expresión General.

N unidades de muestreo $\begin{cases} A \text{ pertenecen a la clase } B & A=3 \\ (N-A) \text{ pertenecen a la clase } \bar{B} & N-A=5 \end{cases}$

Cuál es la probabilidad de que una muestra de n unidades, obtenida SIN REEMPLAZO, tenga : X unidades de la clase B y n-X unidades de la clase $\bar{B}$?

La probabilidad de este hecho es :

$$P_r\ (X) = \frac{\binom{A}{X}\binom{N-A}{n-X}}{\binom{N}{n}}$$

$X = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$

EL SISTEMA DE PROBABILIDADES de este tipo es llamado DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA, la cual es una distribución de frecuencias de np o A, desde la cual p es derivable.

Si A no se conoce, se le puede estimar $\hat{A} = \frac{X}{n} N$.

En resumen, estamos interesados en obtener la probabilidad de seleccionar

X éxitos desde A items llamados favorables y

n-X fracasos desde N-A items llamados desfavorables.

Desarrollo del ejemplo

Selección de 5 cerdos (deben ser seleccio

nados al azar) a partir de un universo de 3 cerdos de raza Duroc Jersey y 5 cerdos de raza Landrace. Encontrar la distribución de probabilidades para el número de cerdos de raza Duroc Jersey.

Sea la <u>variable aleatoria X</u>, el número de cerdos Duroc Jersey seleccionados.

Satisfechas las dos propriedades de la distribución hipergeométrica, tenemos

$$P_r\ (X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$P_r\ (X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P_r\ (X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$P_r\ (X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

3. Distribución de Poisson de Probabilidades

La distribución binomial se transforma en normal a medida que n aumenta hacía un número bien grande. Pero, sin embargo, si n es bien grande y p es tan pequeño que np sea un número pequeño, la distribución que resulta es discontinua y positivamente asimétrica. Tal distribución se conoce como distribución de Poisson.

La distribución binomial es a menudo substituida por una distribución normal para facilitar el análisis de los datos. Por una razón similar la distribución de Poisson puede ser substituida por una distribución binomial.

Debido a que muchas clases de datos biológicos siguen la distribución generada por un valor de n muy grande y un valor de p bien pequeño, la distribución de Poisson es valiosa en investigaciones biológicas.

El término general de la distribución de Poisson que permite el cálculo de la probabilidad de cualquier evento X es el siguiente :

$$P_r(X) = \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}$$

Ya que X puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ... etc. los términos de la distribución de Poisson están dados por :

$$e^{-\mu},\ \mu e^{-\mu},\ \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu},\ \frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu},\ \frac{\mu^4}{4!} e^{-\mu} \ldots$$

ó

$$\frac{1}{e^{\mu}},\ \frac{\mu}{e^{\mu}},\ \frac{\mu^2}{e^{\mu}(2!)},\ \frac{\mu^3}{e^{\mu}(3!)},\ \frac{\mu^4}{e^{\mu}(4!)} \ldots$$

En la distribución de Poisson

$$\sum_{i=1}^{n} P_r(X) = e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = 1$$

dado que

$$e^{\mu} = \frac{\mu^0}{0!} + \frac{\mu^1}{1!} + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \ldots$$
$$= 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \ldots$$

entonces

$$e^{-\mu}(1+\mu+\frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \ldots)$$

es igual a

$$e^{-\mu} + \mu e^{-\mu} + \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} + \frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} P_r(X) = 1$$

La média aritmética y la varianza de esta distribución son iguales entre si $(\mu = \sigma^2)$, donde

$$\mu = np = \Sigma FX/\Sigma F$$

Como ejemplo se puede dar el recuento de glóbulos rojos (X) en las 400 casillas de un hemocitómetro.

(X) CANTIDAD DE ERITROCITOS	(F) Nº DE CASILLAS	$P_r(X)$
0	2	0,0049
1	10	0,0262
2	21	0,0697
3	52	0,1233
4	63	0,1637
5	77	0,1738
6	62	0,1538
7	46	0,1167
8	41	0,0775
9	11	0,0457
10	8	0,0243
11	5	0,0117
$\geq$ 12	2	0,0087 *
	400	1,000

* Residuo

4. Distribución Normal

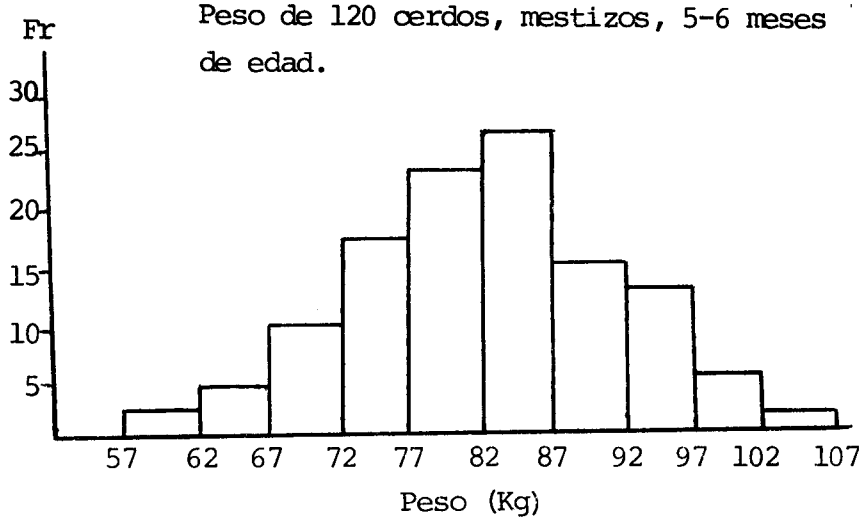
La distribución Normal es una de las más utiles e importantes distribuciones de probabilidades. El nombre " Normal" no implica un juicio de valor. Ella se aplica a variables de tipo continuo.

La distribución Normal ha ocupado un lugar de privilegio en la teoría estadística, así como también en el campo de las aplicaciones. Hace algo más de 200 años(1733) fue dada a conocer por Abraham De Moivre, sin sugerir aplicaciones de ese modelo.

Posteriormente, en la primera parte del siglo XIX, fue redescubierta por C.F. Gauss, quien la empleó para describir la distribución de los errores de observación, que se producen accidentalmente, en las medidas de las órbitas de los cuerpos celestes. Debido a esta razón es común que se llame a la curva Normal, curva de Gauss.

En biología la curva Normal es de bastante utilidad, especialmente cuando se estudian poblaciones de medidas biométricas, por ejemplo : tallas, pesos. Sin embargo, es necesario no dar un excesivo énfasis a esta utilidad, ya que como dice Pearson, si bien es cierto que existen grandes masas de datos, que dentro de ciertos límites siguen la ley Normal, sin embargo, ella no es una ley universal en la naturaleza,sino que es uno, entre los muchos tipos de distribuciones, que permite describir e interpretar un fenómeno natural.

Ya se dijo en la introducción que las distribuciones, en este capítulo analizadas, son de tipo hipotético, téorico. En el trabajo diario, en cambio, se trata con distribuciones de frecuencias observadas, empíricas, finitas , cuya representación gráfica (histograma, polígono de frecuencias) tiene un aspecto anguloso, quebrado como lo muestran las distribuciones de frecuencias que se entregan más adelante, que corresponden a peso corporal (kg) de 120 cerdos mestizos entre 5 y 6 meses de edad.



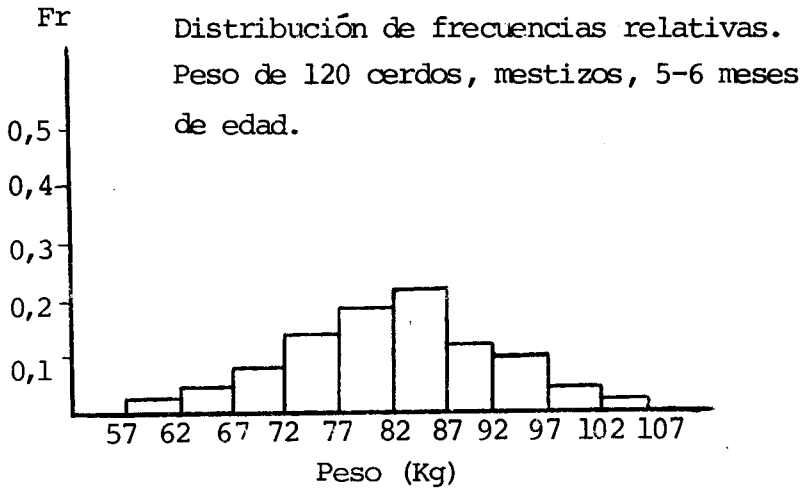
Si se analiza esta distribución de frecuencias se aprecia que adopta, en general, una forma acompañada en la cual se puede observar :

i) una pequeña cantidad de pesos bajos,

ii) una pequeña cantidad de pesos altos,

iii) una gran cantidad de pesos intermedios.

Es decir, existe una gran cantidad de cerdos mestizos, entre 5 y 6 meses de edad, cuyos pesos se asemejan mucho al peso promedio (82,21) de la distribución.



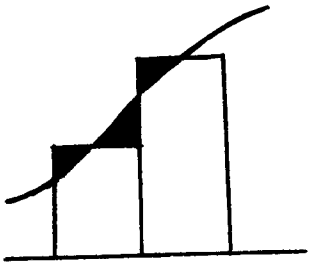
Por otra parte, si se observa el gráfico, aparece la distribución de frecuencias relativas o distribución de probabilidades " a posteriori ", de la muestra de 120 pesos de cerdos mestizos, entre 5 y 6 meses de edad, se pueden expresar las mismas ideas, entregadas ahora, en relación a la distribución de frecuencias relativas :

i) es poco probable que se presenten pesos muy altos o muy bajos.

ii) es muy probable la presentación de pesos centrales, es decir, próximos al promedio.

Ahora, supóngase que se aumenta el tamaño de la muestra (n), y que se puede construir una distribución de frecuencias con un número mayor de intervalos, siendo ellos más estrechos, de base más reducida, de manera que la línea quebrada tienda a ser más suave, hasta llegar al límite en que esta línea sería una curva lisa y no ya una línea angulosa.

Se sabe que el área comprendida por todos los rectángulos de un histograma, es prácticamente igual a la unidad, sin embargo, al intentar trazar una curva suave sobre ellos, se comete cierto grado de error, el cual está en directa relación con la amplitud del intervalo y en relación inversa con el número de intervalos considerados. En estos casos, el área bajo la curva se aproxima, más o menos, a la unidad en la medida de la magnitud del error cometido al trazar la curva. Es conveniente no olvidar que el área de cada rectángulo del histograma refleja la probabilidad " a posteriori " que tiene una observación de caer entre los límites de cierto intervalo de clase, que delimitan la base del rectángulo que lo representa.



$$\text{Area} = \sum_{j=1}^{K} f_j h = 1$$

donde :

f_j = frecuencia relativa del $j^{ésimo}$ intervalo

h = amplitud del intervalo.

En resumen, el límite de la suma anterior está dado por la obtención de intervalos infinitamente pequeños, teniendo la distribución un número de observaciones muy grande , lo que hace que la línea quebrada se aproxime a la continuidad .

Como se ha podido apreciar, las distribuciones de frecuencias empíricas, a medida que el número de observaciones aumenta, tienden a tomar la forma de una campana cada vez más simétrica, característica que las asemeja a la curva Normal, cuyas propriedades serán bosquejadas más adelante.

Existe una ecuación matemática que define a la función de la distribución de probabilidades Normal, si se tiene una variable continua X que se distribuye de acuerdo a dicho modelo. Cuando la variable continua X, es expresada en términos de desvíos relativos (z).

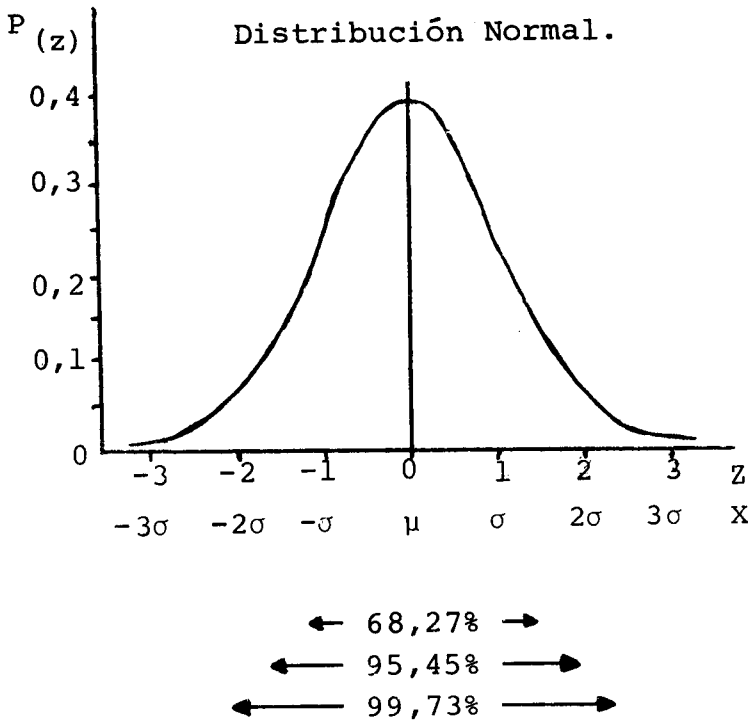
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

se tiene la llamada expresión estandarizada o tipificada de la curva Normal, en tal caso la variable X es substituida por una nueva variable como es z, de manera que al expresar gráficamente la distribución en un eje de coordenadas rectangulares, el eje de abscisas es ocupado por los distintos valores de z y el eje de ordenadas es ocupado por los valores correspondientes de la función de densidad de probabilidades, $P_{(z)}$. Los valores que puede presentar la variable z, así como también las áreas bajo la curva $P_{(z)}$, entre cualquier par de valores de z, se encuentran tabulados. La variable z posee una media aritmética igual a cero y una desviación típica igual a uno. La ventaja del uso

de la variable z radica en que se pueden utilizar sus valores ya tabulados para cualquier valor de μ y σ que tenga la variable X que se estudie.

Propriedades de la curva Normal

a) La distribución Normal tiene forma de campana y es simétrica con respecto a la abscisa z=o, cuando se la considera en forma estandarizada, extendiéndose la curva indefinidamente en dirección positiva y negativa, ya que ambas ramas no llegan a tocar el eje de abscisas, puesto que la distribución Normal va desde $-\alpha$ a $+\alpha$.

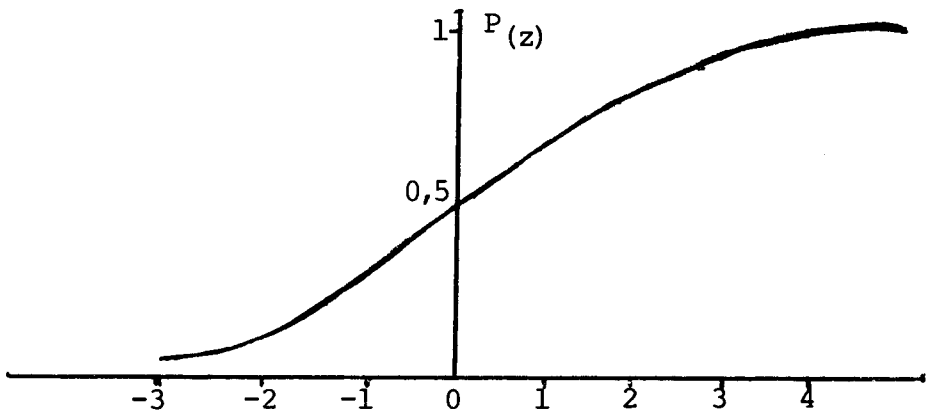


b) La distribución Normal posee un máximo en la abscisa z = o. En este punto de la distribución coinciden la media aritmética, la mediana y el modo. Es una distribución unimodal.

c) La distribución Normal, al ser considerada en forma acumulativa, presenta las áreas bajo la curva, desde $-\alpha$ hasta

cualquier valor de z, como se ha dicho. Esto permite conocer la probabilidad que una observación tiene, de caer a la izquierda de un cierto valor de z.

Distribución Normal Acumulada



En el punto z=0, la distribución de probabilidades Normal acumulada presenta una ordenada cuyo valor $P_{(z)} = 0,5$.

Esta distribución se encuentra tabulada, para propósitos prácticos.

d) El área bajo la curva Normal es aproximadamente igual a la unidad, dicho de otra forma, la curva Normal encierra aproximadamente el 100% de las observaciones. Si se considera el área en relación a la media aritmética y a la desviación típica, se tiene :

- el área bajo la curva Normal, entre $\pm \sigma$ es igual a 0,6827, o sea, en este intervalo se encuentra el 68,27% de las observaciones. Dicho de otra forma existe una probabilidad de 0,6827 de que una observación caiga entre $\pm \sigma$.

- el área bajo la curva Normal, entre $\pm 2\sigma$ es igual a 0,9545, es decir, que en este intervalo se encuentra el 95,45% de las observaciones, o también, que existe una probabilidad de 0,9545 de que una observación caiga entre $\pm 2\sigma$.

- el área bajo la curva Normal, entre $\pm 3\sigma$ es igual

a 0,9973, o sea, en este intervalo se encuentra el 99,73% de las observaciones. Lo que significa que la probabilidad que tiene una observación de caer entre $\pm 3\sigma$ es de 0,9973.

A partir de esto se puede deducir que la frecuencia absoluta " calculada " para un cierto intervalo de una variable X, se obtiene multiplicando el área de ése intervalo (probabilidad) por el número total de observaciones (n).

Ejemplo :

Supóngase que se tienen 4.900 pesos corporales (kg) de cerdos mestizos, de 5 a 6 meses de edad, cuyas constantes son las siguientes :

μ = 82 kg

σ = 9 kg

I $\mu \pm \sigma$ = 73 a 91 kg. Es decir, entre 73 y 91 kg queda el 68,27% de los 4.900 cerdos, o sea :

4.900 x 0,6827 = 3.345 cerdos.

II $\mu \pm 2\sigma$ = 64 a 100 kg. Es decir, entre 64 y 100 kg queda el 95,45% de los 4.900 cerdos, o sea :

4.900 x 0,9545 = 4.677 cerdos.

III $\mu \pm 3\sigma$ = 55 a 109 kg. Es decir, entre 55 y 109 kg queda el 99,73% de los 4.900 cerdos. En este ejemplo se incluye el 100% de los cerdos dentro de dichos límites.

e) La distribución Normal es definida completamente por los parámetros, μ y σ, la media aritmética y la desviación típica, respectivamente. Se sabe que la primera representa la tendencia central o posición de la distribución y la segunda señala el grado de alejamiento de los valores de las observaciones, en relación a la media aritmética (dispersión).

Utilidad práctica de la distribución Normal

Como se ha dicho es de gran utilidad en la teoría estadística. Ahora, desde el punto de vista práctico se sabe que las numerosas causas de variación desconocidas, las variaciones de muestreo y otras formas de variación aleatoria, de pequeña importancia en cuanto a la magnitud individual, tienen la propriedad de adicionar sus afectos, llegando a producir fluctuaciones que pueden ser descritas e interpretadas por la distribución Normal, en términos generales.

a) Sea una muestra de 120 pesos (kg) de cerdos mestizos, de 5-6 meses de edad, cuya distribución de frecuencias aparece en la figura 5.1. De ella se tiene :

μ estimada por $\bar{X} = 80$ kg

σ estimada por $S = 12$ kg

Cuantos cerdos tienen pesos entre $\mu \pm \sigma$?

Respuesta hipotética :

$$80 \pm 12 = 68 \text{ a } 92 \text{ kg.}$$

Deberá haber un 68,27% de los cerdos que pesarán entre 68 y 92 kg, es decir, 82 cerdos.

Respuesta real : Al revisar los datos originales,donde aparecen consignados los 120 pesos corporales, se puede apreciar que existen 90 cerdos cuyos pesos caen en el intervalo $\mu \pm \sigma$.

El desacuerdo que existe entre la solución " calculada" y la realidad se debe a que la distribución de frecuencias de los pesos corporales de los 120 cerdos no se " ajusta " en forma precisa al modelo de la curva Normal, es un tanto asimétrico.

b) Se entrega un ejemplo relativo al área de la curva

Normal que queda entre 2 puntos de la variable estudiada. Esto permite conocer la probabilidad que tienen las observaciones de caer entre dichos puntos y también, al multiplicar ésta por el tamaño de la muestra o población, el número probable de observaciones comprendidas en el intervalo formado por dichos puntos. Se utiliza la distribución de frecuencias de los pesos corporales de cerdos mestizos, cuyos valores característicos son los siguientes :

μ estimada por $\bar{X}$ = 80 kg

σ estimada por S = 12 kg

i) Cuál es la probabilidad que tiene un cerdo de caer entre 72 y 82 kg ?

$X_1 = 72$ tiene un valor de $z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{72-80}{12} = -0,67$

$X_2 = 82$ tiene un valor de $z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{82-80}{12} = 0,17$

Es necesario consultar la tabla de z y áreas de la curva Normal, para los valores de z_1 y z_2, considerando las siguiente regla general : Si z_i y z_j tienen el mismo signo se debe subtraer el área más pequeña del área mayor. Si z_i y z_j tienen signos diferentes, se debe sumar las áreas.

z	área
- 0,67	0,2486
+ 0,17	0,0675

Como tienen signos diferentes los valores de z, se debe sumar las áreas : 0,2486 + 0,0675 = 0,3161 . Es decir, existe una probabilidad de, aproximadamente 0,32 que un cerdo de 5-6 meses de edad, mestizo, tenga un peso corporal

que esté entre 72 y 82 kg. Dicho de otra forma, aproximadamente un 32% de los pesos corporales de cerdos de este tipo caerán entre 72 y 82 kg.

ii) Considerando que la masa de cerdos que se tiene en cuenta en este ejemplo es 120, la frecuencia absoluta probable para el intervalo 72 a 82 kg es de 38 individuos. Si se revisa la información original se observa que en la realidad existen 40 cerdos en ese intervalo. El desacuerdo entre lo calculado y lo observado se debe a las razones antes expuestas.

* * *